境界層方程式の数理
Mathematical Aspect of Boundary-Layer Equation

宮内　敏雄（東京工業大学）
Toshio MIYAUCHI (Tokyo Institute of Technology)

1. 1905 年は科学技術の特異年？

1905 年にアインシュタインは光量子論，ブラウン運動，特殊相対性理論に関する４編の論文を発表している[1]．同じ 1905 年発行の第３回国際数学者会議の議事録（発表は 1904 年，ハイデルベルク）にプラントルの論文「粘性の極めて小さい流体の運動について」が掲載されている[2]．アインシュタインとプラントルには他の学者たちの思いもかけぬ大胆な着想から出発して，独自の理論を構築するという共通点がある．そのため両者とも彼らの理論の社会への受容は遅れ，1921 年のアインシュタインのノーベル物理学賞受賞対象は特殊相対性理論や一般相対性理論ではなく，光電効果の法則の発見に対するものであった．プラントルの場合にも 1905 年の彼の論文の前に同様な考えの発表はなく，その後も 20 年近くプラントルの門下生による数編の論文を除いて後続するものがなかった[3].

2. レイリー問題

境界層方程式について考える前に，レイリー問題について考える．レイリー問題とは平面壁が半無限領域の非圧縮性粘性流体に接しており，壁をある瞬間から突然一定の速度 U_0 で接線方向に動かした場合に流体中に形成される非定常な流速分布を求める問題である．壁の接線方向，法線方向に x 軸， y 軸をとると，流速は x 成分 $u(y,t)$ のみとなり，圧力は流れの場で一定であることから，ナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

となる．ここに ν は動粘性係数である．また，境界条件は

$$u(0,t) = U_0,\quad u(\infty,t) = 0$$

である．

壁が運動を始めたという情報は，粘性の作用により徐々に遠方に及んでゆく．そこで粘性の作用の及ぶ高さを $\delta(t)$ と表すことにする． y を $\delta(t)$ で無次元化すれば，速度分布は相似となることが予測される．そこで，

$$\eta = y/\delta(t) \tag{2}$$

$$u(y,t) = U_0 f(\eta) \tag{3}$$

とおくと，ナビエ・ストークス方程式(1)の各項は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= U_0 \frac{df}{d\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y}{\delta(t)}\right)\\ &= U_0 \frac{df}{d\eta}\cdot\left(-\frac{y}{\delta(t)^2}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \nu U_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{d\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\\ &= \nu U_0 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{d\eta}\cdot\frac{1}{\delta(t)}\right)\\ &= \nu U_0 \frac{d^2 f}{d\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\cdot\frac{1}{\delta(t)}\\ &= \nu U_0 \frac{d^2 f}{d\eta^2}\cdot\frac{1}{\delta(t)^2}\end{aligned}$$

となる．したがって（1）式は

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta\frac{df}{d\eta}\left(\frac{\delta(t)}{2\nu}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt}\right) = 0 \tag{4}$$

となる．この式から

$$\frac{\delta(t)}{2\nu}\cdot\frac{d\delta(t)}{dt} = c^2 \quad (\text{＝一定値}) \tag{5}$$

の場合に，相似解を持つことが分かる．一般性を失うことなく $c^2 = 1$ とおくことができるので，基礎方程式は

$$f'' + 2\eta f' = 0 \tag{6}$$

境界条件は

$$f(0) = 1,\quad f(\infty) = 0$$

となる．(6)式は,

$$\begin{aligned}2\eta &= -f''/f' = -(d(f')/d\eta)/f'\\ &= -d(\ln f')/d\eta\end{aligned}$$

となり，上式を積分すると，

$$-\eta^2 + const. = \ln f'$$

これを整理すると，

$$\frac{df}{d\eta} = \alpha \exp(-\eta^2)$$

が得られ，上式をもう一度積分すると，

$$f(\eta) = \alpha \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta + \beta \tag{7}$$

となる．境界条件から，

$$\alpha = -2/\sqrt{\pi}\ ,\quad \beta = 1$$

となり，(1)式の解は,

$$U(y,t) = U_0(1 - \mathrm{erf}(\eta))$$

$$\mathrm{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$$

となる．

さて，(5)式は一階の常微分方程式であるので，容易に解を求めることができ，その解は

$$\delta(t) = 2\sqrt{\nu t}$$

となる．すなわち，粘性の作用の及ぶ高さ$\delta(t)$は動粘性係数の平方根，時間の平方根に比例して大きくなることが分かる．変数変換

$$\eta = y/\sqrt{\nu t}$$

は，Boltzmann 変換と呼ばれている．

平面壁が半無限領域の非圧縮性粘性流体に接しており，壁を接線方向に一定の角振動数ω，最大速度U_0で振動させた場合に流体中に形成される非定常な流速分布を求める場合の基礎方程式も（1）式で与えられ，境界条件は

$$u(0,t) = U_0 \cos \omega t\ ,\quad u(\infty,t) = 0$$

となる．この問題の解は

$$u(y,t) = U_0 \exp(-\eta) \cos(\omega t - \eta)$$

$$\eta = y/\delta(\omega)\ ,\ \ \delta(\omega) = \sqrt{2\nu/\omega}$$

となる[4].

このように，平面壁をある瞬間から突然一定の速度U_0で接線方向に動かした場合も，壁を接線方向に一定の角振動数ωで振動させた場合も共に粘性の作用の及ぶ高さは動粘性係数の平方根に比例することが分かる．

3. 平板に沿う層流境界層

流速$U(x,t)$の非圧縮性粘性流体中に置かれた平板に沿う層流境界層を対象とする場合，平板のスパン方向には変化がないため，平板の接線方向をx軸，法線方向をy軸とした二次元問題として扱うことができる．この場合，$u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$に対する基礎方程式は連続の式とナビエ・ストークス方程式であり，次のようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{10}$$

また，境界条件は

$$u(x,0,t) = 0\ ,\quad v(x,0,t) = 0$$

$$u(x,\infty,t) = U(x,t)\ ,\quad v(x,\infty,t) = 0$$

となる．

境界層(平板近傍の粘性の影響の卓越した領域)内で（8)，(9)，(10）式の各項の大きさの評価を行う．前章において，平面壁をある瞬間から突然一定の速度U_0で接線方向に動かした場合も，壁を接線方向に一定の角振動数ωで振動させた場合も共に粘性の作用の及ぶ高さは動粘性係数の平方根に比例することが明らかにされている．すなわち

$$\delta \propto \nu^{1/2}$$

である．主流の代表速度U_0，平板の長さlで無次元化すると，

$$\delta/l \propto \sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}} \propto \mathrm{Re}^{-1/2},\ \ \mathrm{Re} = U_0 l/\nu \tag{11}$$

となり，境界層厚さ（粘性の作用の及ぶ高さ）はレイノルズ数の平方根に逆比例することが分かる．このことは，レイノルズ数が高くなれば高くなるほど境界層厚さが薄くなることを意味する．この境界層の外側は，粘性の効果を無視することができるため，ポテンシャル流れであると考えること

ができる．

（8），（9），（10）式の x 座標を平板長さ l で，y 座標を境界層代表厚さ δ_0 で，x 方向流速を主流の代表速度 U_0 で，y 方向流速を境界層外縁における y 方向速度 V_0 で，圧力を主流の動圧の２倍 $\rho U_0^{\ 2}$ で，時間を l/U_0 で無次元化すると，

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{l}{\delta_0}\frac{V_0}{U_0}\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{l}{\delta_0}\frac{V_0}{U_0}v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\\&=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{l^2}{\delta_0^{\ 2}}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+\frac{l}{\delta_0}\frac{V_0}{U_0}v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\\&=-\frac{l}{\delta_0}\frac{U_0}{V_0}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{l^2}{\delta_0^{\ 2}}\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

となる．また，境界条件は

$$u^*(x^*,0,t^*)=0,\quad v^*(x^*,0,t^*)=0$$

$$u^*(x^*,\infty,t^*)=1,\quad v^*(x^*,\infty,t^*)=0$$

である．ここで，u^* 等は無次元の量を表している．

（13）式の右辺第２項の粘性項中の第１項と第２項を比較すると，$l^2/\delta_0^{\ 2}\propto \mathrm{Re}$ であるから，レイノルズ数が十分に大きな場合に，x の２階微分は y の２階微分に比べて無視することができる．また，(12)式の連続の式の x 微分と y 微分が釣り合うことから，

$$\frac{l}{\delta_0}\frac{V_0}{U_0}=O(1)$$

となる．すなわち

$$V_0\propto\frac{\delta_0}{l}U_0\propto U_0/\sqrt{\mathrm{Re}}$$

となり，境界層外縁における y 方向速度はレイノルズ数の増加に伴い，$1/\sqrt{\mathrm{Re}}$ に比例して小さくなることが分かる．

(14)式の右辺第１項の圧力勾配項は他の項に比べて

$$\frac{l}{\delta_0}\frac{U_0}{V_0}\propto \mathrm{Re}$$

だけ大きく，高レイノルズ数の場合，他の項は圧力勾配項に比べて無視することができる．したがって，

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

となる．このことから境界層内の圧力は境界層外縁における圧力に等しく，境界層内で圧力は y 方向に変化しないことが分かる．境界層の外側では，粘性の効果を無視することができ，ポテンシャル流れであると考えられるため，境界層外縁の圧力は主流速度 $U(x,t)$ を用いて

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

により決定することができる．平板境界層の場合，境界層による排除厚さの影響を無視すれば，主流速度は一定となるため，境界層外縁の圧力も x 方向の位置によらず一定となる．

以上から，流速 $U(x,t)$ の非圧縮性粘性流体中に置かれた平板に沿う層流境界層を支配する基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{16}$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{17}$$

となる．

(9)式と(16)式を比較すると，(9)式が x の２階微分と y の２階微分を含む楕円型の偏微分方程式であるに対して，(16)式は y の２階微分のみを含む放物型の偏微分方程式になっており，方程式の形が異なっていることが分かる．楕円型の偏微分方程式の場合，初期条件および x と y に対するそれぞれ２つの境界条件が必要であり，その解は上流および下流の影響を受ける．それに対して，放物型の偏微分方程式の場合，初期条件および x に対する１つの境界条件と y に対する２つの境界条件のみが必要であり，その解は上流境界条件のみで決まり，下流方向に積分を進めることができる．このことが境界層方程式の優位性の基となっている．

4. 平板境界層のブラジウス解

前章で明らかにしたように一様流速 U_0 の非圧縮性粘性流体中に置かれた平板に沿う層流境界層に対する基礎方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{18}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{19}$$

となり，圧力は流れの場全体で一定となる．また境界条件は

$$u(x,0)=v(x,0)=0 \qquad (20)$$

$$u(x,\infty)=U_0 \qquad (21)$$

となる．

前章の(11)式から，平板先端から x 離れた場所における境界層厚さは

$$\delta(x)\propto\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}$$

と見積もることができる．そこでレイリー問題と同様に y を $\sqrt{\nu x/U_0}$ で無次元化して相似変数

$$\eta=\frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}}$$

を導入して相似解を求めることを考える．（Kaysら[5]はレイリー問題におけるのと同様な方法を用いて，相似変数が上式となることを示している.）

相似解は

$$\frac{u}{U_0}=g(\eta)$$

と仮定することができる．

速度と流関数の関係

$$u=\partial\Psi/\partial y \qquad (22)$$

$$v=-\partial\Psi/\partial x \qquad (23)$$

の内，(22)式を y で積分すれば

$$\Psi=\int u dy+c(x)=U_0\int g(\eta)\frac{dy}{d\eta}d\eta+c(x)$$
$$=U_0\sqrt{\nu x/U_0}\int g(\eta)d\eta+c(x)$$
$$=\sqrt{\nu U_0 x}\int g(\eta)d\eta+c(x)$$

を得る．

上式を(23)式に代入すると，

$$v=-\frac{\partial\left(\sqrt{\nu U_0 x}\int g(\eta)d\eta\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(c(x)\right)}{\partial x}$$

となり，$y=0$ で $v=0$ の条件が満たされるためには，$c(x)=0$ とすればよいことが分かる．従って $\int g(\eta)d\eta$ を $f(\eta)$ と書くと流関数 Ψ は

$$\Psi=\sqrt{\nu U_0 x}f(\eta) \qquad (24)$$

となる．

流関数 Ψ と相似変数 η を用いて基礎方程式(19)の各項を表すと

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{\eta}{x}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{\nu x/U_0}}$$

であるから，

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=U_0 f'(\eta)$$

$$v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}f(\eta)-\sqrt{\nu U_0 x}f'(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\left(\eta f'(\eta)-f(\eta)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=-U_0 f''(\eta)\frac{\eta}{2x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=U_0 f''(\eta)\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(U_0 f''(\eta)\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}$$
$$=\frac{{U_0}^2}{\nu x}f'''(\eta)$$

となる．これらを(19)式に代入すると，

$$2f'''+ff''=0 \qquad (25)$$

を得る．境界条件は，(20)，(21)式に対応して，

$$f'(0)=0,\ f(0)=0,\ f'(\infty)=1 \qquad (26)$$

となる．(25)式は３階の非線形常微分方程式であり，$\eta=0$ で二つ，$\eta=\infty$ で一つの境界条件が与えられる二点境界値問題となっている．

ブラジウスは方程式(25)の解を級数展開法と摂動法を用いて求めている．まず，壁面近傍の解を求めるために $f(\eta)$ を $\eta=0$ の周りに級数展開すると，

$$f(\eta)=A_0+A_1\eta+\frac{A_2}{2!}\eta^2+\frac{A_3}{3!}\eta^3+\cdots$$

$$f'(\eta)=A_1+A_2\eta+\frac{A_3}{2!}\eta^2+\frac{A_4}{3!}\eta^3+\cdots$$

$$f''(\eta)=A_2+A_3\eta+\frac{A_4}{2!}\eta^2+\frac{A_5}{3!}\eta^3+\cdots$$

$$f'''(\eta)=A_3+A_4\eta+\frac{A_5}{2!}\eta^2+\frac{A_6}{3!}\eta^3+\cdots$$

となる．$\eta=0$ における境界条件から

$A_0 = 0$， $A_1 = 0$

となる．級数展開を(25)式に代入し，η の等ベキの項ごとにまとめると，

$$2A_3 + 2A_4\eta + \frac{1}{2!}\left(A_2^{\ 2} + 2A_5\right)\eta^2 + \frac{1}{3!}\left(4A_2A_3 + 2A_6\right)\eta^3 + \cdots = 0$$

となる．$\eta = 0$ 近傍の解は 3 つの境界条件のうち 2 つしか満足できないので，A_2 をパラメータとして残すと，各係数が次のようになる．

$A_3 = 0$，$A_4 = 0$，$A_5 = -\frac{1}{2}A_2^{\ 2}$，$A_6 = 0$，

$A_7 = 0$，$A_8 = -\frac{11}{2}A_2A_5 = \frac{11}{4}A_2^{\ 3}, \cdots$

$A_2 = \alpha$ とおくと，f を次のように表すことができる[4].

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\alpha^{n+1}C_n}{(3n+2)!}\eta^{3n+2} \qquad (27)$$

ここで，

$C_0 = 0$，$C_1 = 1$，$C_2 = 11$，$C_3 = 375$

$C_4 = 27{,}897$，$C_5 = 3{,}817{,}137$

である．（このような級数展開は収束半径が狭いことが Weyl によって示されており，常微分方程式の数値解により解を求めることが勧められている[6,7].）

次に $\eta = \infty$ での摂動解を求める．そのために f をパラメータ ε のベキ級数として次のように表す.

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \cdots$$

$$f'' = f_0'' + \varepsilon f_1'' + \varepsilon^2 f_2'' + \varepsilon^3 f_3'' + \cdots$$

$$f''' = f_0''' + \varepsilon f_1''' + \varepsilon^2 f_2''' + \varepsilon^3 f_3''' + \cdots$$

ここで，f_i は η に関する未知関数である．摂動解の場合，第 0 近似解 f_0 が分かったとして，それに対する補正関数 $f_1(\eta) > f_2(\eta) > f_3(\eta) > \cdots$ を求めることになる.

上記の関係式を（25）式に代入して，ε の等ベキ項ごとにまとめると，

$$\varepsilon^0\left(2f_0''' + f_0f_0''\right) + \varepsilon\left(2f_1''' + f_0f_1'' + f_1f_0''\right) + \varepsilon^2\left(2f_2''' + f_0f_2'' + f_2f_0'' + f_1f_1''\right) + \cdots = 0$$

となる．ε の等ベキの各項を 0 と置くと，

$$2f_0''' + f_0f_0'' = 0$$

$$2f_1''' + f_0f_1'' + f_1f_0'' = 0$$

$$2f_2''' + f_0f_2'' + f_2f_0'' + f_1f_1'' = 0$$

を得る．$\eta = \infty$ で $f' = 1$ となることを考慮して上の第 1 式を満たす第 0 近似の関数 f_0 として最も簡単な線形解

$f_0 = \eta - \beta$

を選ぶことにする．上式を f_1 に関する微分方程式に代入すると

$$2f_1''' + (\eta - \beta)f_1'' = 0$$

故に

$$\frac{f_1'''}{f_1''} = \frac{1}{2}(\beta - \eta)$$

これを積分すれば

$$\ln f_1'' = \frac{1}{2}\beta\eta - \frac{1}{4}\eta^2 + c$$

となる．新しい積分定数を γ として，

$$c = -\frac{\beta^2}{4} + \ln\gamma$$

と置くと，f_1'' は

$$f_1'' = \gamma\exp\left\{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2\right\}$$

となる．境界条件

$$f'(\infty) = f_0'(\infty) + f_1'(\infty) + f_2'(\infty) + \cdots = 1$$

すなわち

$$f_1'(\infty) = 0$$

を考慮に入れて f_1'' をもう一度積分すれば

$$f_1' = -\gamma\int_\eta^\infty \exp\left\{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2\right\}d\eta$$

となる．上式をさらに積分し，$\varepsilon = 1$ と置いて f_0 との和をとれば

$$f(\eta) = \eta - \beta + \gamma \int_\eta^\infty \int_\eta^\infty \exp\left\{-\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2\right\} d\eta d\eta \qquad (28)$$

となる．摂動解の精度を上げるには f_2 を求めればよいが，実用上の問題に対して(28)式は十分な精度を有している．

(28)式は $\eta = \infty$ における一つの境界条件しか与えられていないため，二つの積分定数 β, γ を含んでいる．一方，η の小さなところで成立する(27)式は $\eta = 0$ における二つの境界条件しか与えられていないため，一つの積分定数 α を含んでいる．これら二つの解がともに成立する領域で，f, f', f'' が接続するように定数 α, β, γ を決定すると，

$\alpha = 0.332$，$\beta = 1.73$，$\gamma = 0.231$

となる[4]．

解の精度の向上は Howarth[8]によって行われており，f, f', f'' が η の関数として示されている[4]．これらから流速 u，v，各種境界層厚さ，壁面せん断応力等を求めることができる．

5. 終りに

プラントルによって提案された境界層理論は航空機の発達とともに実用上の多くの問題に適用され，多くの成果を挙げてきた．その対象も層流境界層だけではなく乱流境界層 [9]，さらには化学反応を含む流れ[10]にまで拡張されている．著者が助手や助教授であった時代は，現在ほど計算機の性能が優れておらず，計算速度や記憶容量に制限があったため，境界層近似を施した基礎方程式を用いて燃焼場等の計算を行ったものである．その意味では境界層理論には大変お世話になった．

Annual Review of Fluid Dynamics には境界層理論関係のレビュー論文が数多く掲載されており，Vol.33[11]には Vol.1 から Vol.33 までの各章のタイトルが掲載されているので，興味ある方には一読をお勧めする．

境界層理論の考え方は，流体力学のみならず非線形方程式の解法として，特異摂動法[7,12]と呼ばれる手法に発展した．このように境界層理論は 20 世紀を通して発展した偉大な理論であるということができる．

参考文献

[1] 湯川秀樹監修，アインシュタイン選集 1，共立出版 (1982).

[2] Prandtl, L., Verh. Ⅲ Int. Math. Kongr., Heiderberg, 1904, (1905) 484.

[3] 谷一郎編，流体力学の進歩　境界層，丸善 (1984).

[4] 日野幹雄，流体力学，朝倉書店 (1992).

[5] Kays, W. M. and Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill (1993) 90.

[6] Meksyn, D., New Methods in Laminar Boundary-Layer Theory, Pergamon Press (1961) 78.

[7] Van Dyke, M., Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press (1964).

[8] Howarth, L., Proc. Roy. Soc. London A, **164** (1938) 547.

[9] Schlichting, H. and Gersten, K., Boundary-Layer Theory, Springer (2000).

[10] Hartnett, J. P. and Irvine, T. F. (Ed.), Advances in Heat Transfer, **2,** Academic Press (1965) 109.

[11] Annual Review of Fluid Dynamics, **33** (2001) 682.

[12] 寺沢寛一編，自然科学者のための数学概論 応用編，岩波書店 (1969) 236.