

マックス・プランク(1858~1947)の功績

A meritorious deed of Max Planck (1858 - 1947)

花村 克悟 (東京工業大学)

Katsunori HANAMURA (Tokyo Institute of Technology)

e-mail: hanamura@mech.titech.ac.jp



マックス・プランク (1858~1947)

1. はじめに

19 世紀末に鉄鋼業が盛んとなったドイツでは、鉱石から鉄を取り出すにあたり、コークスを燃料として、蒸気機関で送風する熱風高炉製鉄法が発明されました。このとき、鉄が溶けるような、当時としては高い温度を測定する温度計が無く、その色と温度の関係が詳しく研究されました。これがよく知られたプランクの法則につながり、さらには量子力学の幕開けとなりました。

当時、ウィーン放射法則 (図 1) は、振動数 ν が高い可視光領域にはよく合うが、振動数が低い赤外域では合わない、一方、レイリー・ジーンズの放射法則 (図 2) は赤外域ではよく合うが振動数が高くなると破綻する。そこにプランクが登場し、エネルギーの最小単位を考え、その整数倍のエネルギー値のみ取りうる画期的な理論を発表しました。などといった劇画風の記述が多くみられます。しかしながら、実際にはそうではなく地味で着実、かつ厳密な学風のプランクにとって、取りうる整数倍のエネルギー値、といった考え方を受け入れるには躊躇したと伝えられています。こ

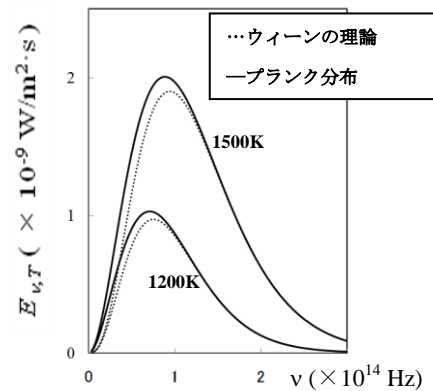


図 1 ウィーン放射法則

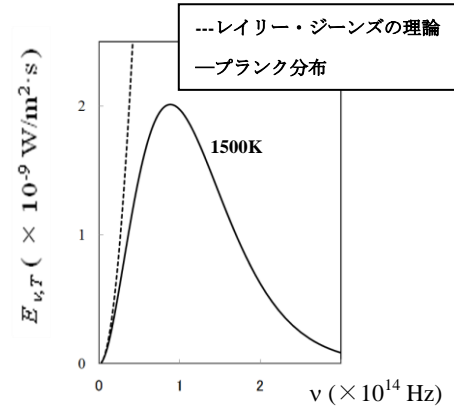


図 2 レイリー・ジーンズ放射法

ここでは、そのプランクの法則の導出を顧みながら、その考え方に触れてみたい。

2. プランクの法則

2.1 内挿式の発表

1897 年から 1900 年の 3 年間に考え抜いたプランクは、その 10 月に、熱放射の分布式が以下のように表わされるならば、全周波数領域において実験値ときわめてよく合うことを発表しました。それは飛び入り講演であったようです[1].

$$E_{\nu,T} = \frac{av^3}{\exp(bv/T)-1} \quad (1)$$

ここで、 a 、 b は定数です。この式の中で振動数 ν が大きい $\exp(bv/T) \gg 1$ 場合には分母の 1 を無視することで、ウィーン放射法則となります。一方、振動数が低い $\exp(bv/T) \ll 1$ 場合には $\exp(bv/T) = 1 + bv/T + \dots$ と展開すると、レイリー・ジーンズの放射法則となります。これが内挿公式と呼ばれている理由です。この導出過程は、一般的にはエネルギーの最小単位を $\epsilon = h\nu$ として理論が展開されています。しかしながら、最初からそういった考えが直観的に浮かんだわけではなく、試行錯誤の結果だったようです。また、内挿公式と後に名付けられたものの、レイリー・ジーンズの放射法則とはほぼ同時に発表されており、プランク自身、それらの論文を参考にすることなく、独自に導き出したとみられています。

2.2 プランク分布と色温度⁽²⁾

多くの教科書にあるように、絶対温度 T の黒体から、波長 λ と $\lambda+d\lambda$ の微小波長帯で放射される単色放射能 $E_{b,\lambda}$ は次式のように表現されます。

$$E_{b,\lambda} = \frac{2\pi hc_0^2}{\lambda^5 [\exp(hc_0/\lambda kT)-1]} d\lambda \quad (2)$$

ここで、 h はプランク定数、 k はボルツマン定数、 c_0 は真空中での光速です。式(2)で表される単色放射能と波長との関係、すなわちプランク分布を各絶対温度 T について図3に示します。いずれの温度の黒体においても単色放射能は波長が長くなるにつれ、連続的に一旦増大し、その後減少します。一方、波長を固定すると単色放射能は温度が高くなるにつれ単調に増加します。また、温度が高くなるとともに、波長の短いふく射（電磁波）が多く放射されることもわかります。

一般に物体を加熱した場合、530℃（≒800K）程度まではほとんど可視光を放射しないので暗闇の中でも赤熱を見ることができないが、その温度を超えてくると、図3からもわかるように、まず可視領域の波長の長い光を発するようになるため、図4に示されるように物体は暗赤色を帯びてきます。その後、温度の上昇とともに波長の短い可視光を発するようになる（図3）ため、図4のよう

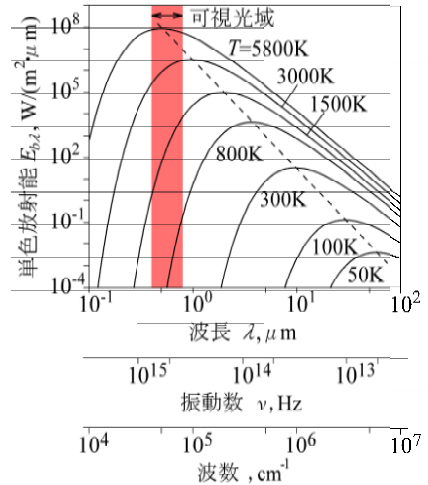


図3 プランク分布^[2](単色放射能)

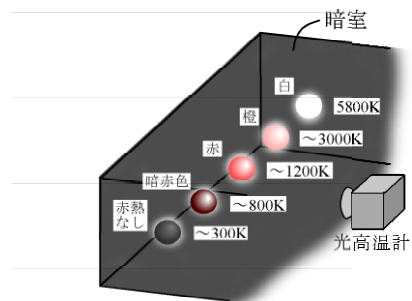


図4 暗室内での赤熱状態^[2]

に漸次、赤色、橙色、黄色と変化し、高温になるにしたがい全ての可視領域の光が混じり合い、白みを帯びてきます。このように加熱された物体の色で温度を把握することができ、この原理を応用した光高温計も昔から使われています。むしろ、この研究がふく射の放射法則や量子力学につながっているのです。

2.3 プランクの法則の導出^[2]

ここでは、エネルギーの最小単位が $h\nu$ で表せることがわかっている現代的な説明を試みましょう。

(a)ふく射におけるエネルギーの最小単位

振動数 ν の光は、分子や原子あるいは電子が高いエネルギー状態 E_i から低いエネルギー状態 E_j に移るとき、 $E_i - E_j = h\nu$ として放射されます。ここで h はプランク定数です。この $h\nu$ について考えます。ふく射を放射する分子や原子（振動子もしくは電気双極子、プランクは共鳴子としている）が持つエネルギー ϵ やそのエネルギーを持っている時間 τ を測定しようとする、その測定値には不

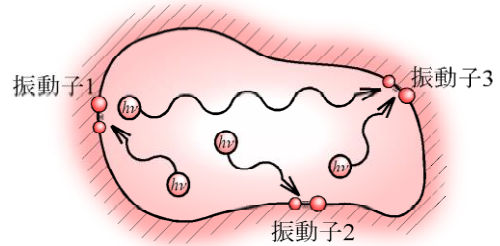
確定量 $\Delta\varepsilon$ と $\Delta\tau$ がともない、その積はプランク定数 h より小さくなりません。すなわち、 $\Delta\varepsilon\Delta\tau \geq h$ の関係があり、これをハイゼンベルグの不確定性原理といいます。この振動子の持つエネルギーを観測するための時間は少なくとも1波長分、すなわち $1/\nu$ (秒) を要します。よって、少なくとも $\Delta\tau \approx 1/\nu$ でなければなりません。したがって、 $\Delta\varepsilon \geq h\nu$ です。つまり、エネルギーを交換(吸収、および放射)する際のエネルギーの最小単位は $h\nu$ と記述できます。

(b) 振動子のエネルギー吸収とエネルギー準位

次に基底状態にある分子や原子(振動子)に $h\nu$ のエネルギーを持つふく射があたかも粒子のように入射し、吸収されると、その分子の持つエネルギー(エネルギー準位)が $h\nu$ だけ大きくなります。したがって、図5に示すように、入射するエネルギーは $h\nu$ より小さくならないので、分子や原子(振動子)のエネルギー準位は連続的ではなくこのエネルギー準位は $h\nu$ の整数倍の離散的な値をとります。

(c) 振動数 ν の振動子が持つ平均エネルギー

このような振動子(分子もしくは原子)が絶対温度 T の空洞内の壁面に無数に存在します。仮に図6に示すように3つの振動子で構成され、振動数 ν の最小エネルギー $h\nu$ が4個とします。各々の振動子のエネルギー準位は、基底状態もしくは $3h\nu$ や $2h\nu$ とランダムに変化します。4つの $h\nu$ 粒子が3つの振動子に分配される組み合わせは、表1に示すように、15通りです。ここで、1つの振動子が4つの $h\nu$ 粒子を持つ確率は15分の1、3つ持つ確率は15分の2などとなります。無数の振動子と $h\nu$ 粒子について考えると、1つの振動子が $h\nu$ のエネルギーを m 個持つ確率は $\exp(-m \cdot h\nu/kT)$ に



ふく射を放射・吸収する振動子が3つ、エネルギー $h\nu$ が4つの場合、4つの $h\nu$ 粒子をキャッチボールして熱平衡を保っている。

図6 空洞内の振動子間での $h\nu$ の吸収と放射[2]

表1 4つの最小エネルギー $h\nu$ が3つの振動子に分配される組み合わせ[2]

	1	2	3
振動子	●●●●	●●●●	●●●●
15通りの分配組み合わせ	●●●●		
		●●●●	
			●●●●
	●●●●	●●	
	●●●●		●●
	●●	●●●●	
		●●●●	●●
	●●		●●●●
		●●	●●●●
	●●●●		●●●●
	●●●●	●●●●	
	●●●●		●●●●
	●●	●●●●	●●
	●●	●●●●	●●
	●●	●●	●●●●

比例します。このように、1つの振動子のみが多くのエネルギーを持つことは起こりにくいことを表しています。したがって、熱平衡状態においてこれら一つ一つの振動子が平均的に持ちうるエネルギー $\bar{\varepsilon}$ はエネルギー準位が離散的であることから、それらの和として以下のように求められます。

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot h\nu \cdot e^{(-m \cdot h\nu/kT)}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{(-m \cdot h\nu/kT)}} \quad (3)$$

ここで、 $x = \exp(-h\nu/kT)$ とおくと、 $1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x)$ 、 $1 + 2x + 3x^2 + \dots = 1/(1-x)^2$ であるから、 $\bar{\varepsilon}$ は以下のようになります。

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (4)$$

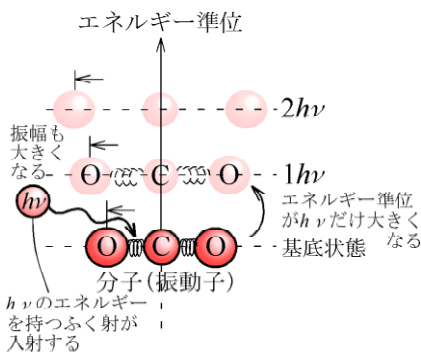


図5 $h\nu$ の吸収とエネルギー準位[2]

(d)平均エネルギー $\bar{\epsilon}$ を有する振動子の数密度

図 7 に示すように、1 つの振動子から放射されたエネルギーが、もう 1 つの振動子に吸収されるためには、双方の振動子が、ふく射を波としたときの定在波の節であることが必要です。その条件は、任意形状の空洞の代表長さを L (空間体積を L^3) とすると、 $n = 2L/\lambda$ (n は整数) です。この条件を満たす振動子の数 $\Delta N(\nu)$ は、 n の x, y, z 成分を n_x, n_y, n_z とすると、 $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ を満たす (n_x, n_y, n_z) の組み合わせの数として求められます。この数は n の数値が大きいと仮定すると、ちょうど図 8 に示す n_x, n_y, n_z を座標とする内外半径が n と $n + dn$ の球殻の体積に等しい。ここで、 n_x, n_y, n_z が正の整数であることからその全球殻体積の $1/8$ であり、また、電磁波には電界 E が y 軸と平行、および x 軸と平行な 2 種類が考えられることから、微小な球殻に含まれる振動子の総数 $\Delta N(\nu)$ は以下のように表されます。

$$\Delta N(\nu) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4\pi n^2 dn = \pi \left(\frac{2L\nu}{c} \right)^2 d \left(\frac{2L\nu}{c} \right) = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (5)$$

ここで、 $\lambda = c/\nu$ を用いています。また、その数密度 $n_o(\nu)d\nu$ は空間体積 L^3 で割ることにより以下のように表されます。

$$n_o(\nu)d\nu = \frac{\Delta N(\nu)}{L^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (6)$$

(e)プランクの法則

振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある定在波の数密度 $n_o(\nu)d\nu$ とその両端にある振動子 1 個が持つ平均エネルギー $\bar{\epsilon}$ との積が、絶対温度 T の平衡状態にある空洞内部において振動数 ν と $\nu + d\nu$ の間で放射される単色放射能となり、これが式(2)のプランクの法則です。なお、 $d\lambda = -(c_o/\nu^2)d\nu$ および $E_{\nu, \lambda} d\lambda = n_o(\nu) \nu d\epsilon$ を利用しています。

3. プランクの考察と生涯

3.1 内挿式の考え方

キルヒホッフの法則は、1859~1860 年にかけて発表されているが、その内容や重要性については十分把握されていないまま、ドイツの盛んな鉄鋼業を背景に、光高温計からふく射の放射法則に引き継がれることとなります。そして、1879 年にはステファンが放射エネルギー量が絶対温度の 4 乗に比例するらしいことを発見しています。後にボルツマンが当時の電磁気学と熱力学を使って 1884 年に説明し、ステファン・ボルツマンの法則

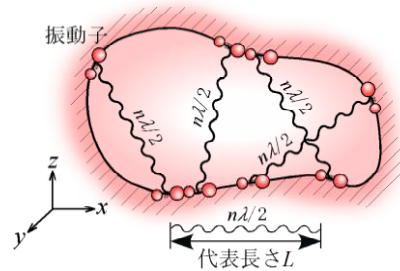


図 7 振動子間の定在波の条件[2]

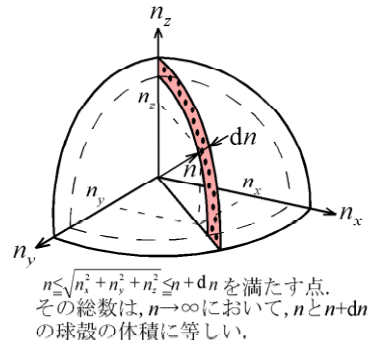


図 8 定在波を満たす振動子の数[2]

として知られるようになりました。しかしながら、その後の他の研究者による追試がうまくいかず、しばらくの間、信頼されることはなかったようです。現在では、式(2)を波長全域にわたって積分することで導かれる、として説明されていますが、歴史的には順序は逆です。

マックス・プランクは 1858 年、キールに生まれました。少年時代、母親の影響から音楽、特にピアノ演奏に関しては特異な才能を示していましたが、音楽家を目指すことは無く、17 歳でミュンヘン大学に進学しました。また、当時有名な法律家の父に影響され、物理と法律のどちらに進むか迷ったとの話もありますが、よくわかりません。専攻分野は数学であったが、次第に熱力学に傾倒していったようです。しかし当時の指導教官は、「物理には、もう大した問題は残っていない。電子と空洞放射ぐらいが残っているが、これも間もなく解決するだろう。あとは重箱のすみをつつくような仕事しかない。」と、いい放ったと伝えられています。プランクが熱力学分野に進むことに反対しました。皮肉な巡り合わせに思えます。このため、ベルリン大学に転校し、この分野の大家であるヘルムホルツやキルヒホッフに師事し、1879 年学位を取得しました。その後、ミュンヘン大学講師(1880 年)、キール大学教授(1885 年)、ベルリン大

学教授(1892年)などを歴任しました。そして、1890年代後半にふく射の放射に関する問題に独自に取り組んだと考えられます。

プランクの考え方は、2.3節の $h\nu$ を直接導入したものではありません。当初は、むしろエネルギー値は連続的に取りえると考えていました。そして、“共鳴子”なるものを考え、全エネルギー E_i がこの N 個の共鳴子に分配されると考えました。しかし、取りうるエネルギー値が連続的であればその全エネルギーを N 個の共鳴子で分配する組合せ方は無限通りとなります。この無限通りの問題を回避するために便宜上、有限個の P 個の微小なエネルギーの粒に分けられると考えました。そして、計算後、 P を無限大に近づけることを考えたわけです。もうお気づきのようにこの P 個の微小なエネルギーの粒こそがのち後の $h\nu$ に他なりません。

さて、その組合せは2.3節(c)で解説しました。具体的には下記のような組合せとなります。

$$W = \frac{(P+N-1)!}{P!(N-1)!} \quad (7)$$

この組合せからエントロピー $S = k \ln(W)$ が求められます。

$$S = k \ln \left(\frac{(P+N-1)!}{P!(N-1)!} \right) \quad (8)$$

また、この組合せについては、 P も N も十分大きいと考え、さらに Stirling の公式により、第1次近似として以下のように書き換えられます。

$$S = k \ln \left(\frac{(P+N)^{N+P}}{P^P N^N} \right) \quad (9)$$

$$= k \{ (N+P) \ln(P+N) - P \ln P - N \ln N \} \quad (10)$$

$$= kN \left\{ \left(1 + \frac{P}{N}\right) \ln N \left(1 + \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{N} \ln N \frac{P}{N} - \ln N \right\} \quad (11)$$

ここで、微小なエネルギーの粒を $\varepsilon = E_i/P$ とおいて、さらに、2.3節(c)で導入した平均エネルギー $\bar{\varepsilon} = E_i/N$ を用いると、

$$\frac{P}{N} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (12)$$

となります。式(11)を変形すると、

$$= kN \left\{ \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) - \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \ln \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right\} \quad (13)$$

となります。これを以下の熱力学の関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E_i} \right)_V = \left(\frac{\partial S}{N \partial \bar{\varepsilon}} \right)_V = \frac{1}{T} \quad (14)$$

に代入すると、

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{N \partial \bar{\varepsilon}} \right)_V = \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}} \left[k \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) - \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \ln \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right] \quad (15)$$

$$\therefore \frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon} \ln \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} + 1 \right) \quad (16)$$

となる。したがって、共鳴子1個の平均エネルギーは、式(4)と同様な、以下の式に到達します。

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\exp(\varepsilon/kT) - 1} \quad (17)$$

ここで、微小な粒のエネルギー ε は、無限通りの問題を回避するために導入されたものです。そこで、これをゼロに近づけるとどうなるでしょう。分母は $1 + \varepsilon/kT + \dots$ と展開できるので、結局レイリー・ジーンズの放射法則の式となります。この放射法則は、上記2.3節(d)で説明したような、密閉空間での定在波の数密度(6)式にエネルギー kT を掛けたものであり、エネルギー等分配則に基づいています。プランクとはまったく異なる考え方です。しかも、1900年に発表され、1905年に完成したものであり、この論文を見たうえでプランクが発表したわけではありません。したがって、プランクはこれをゼロに近づける意味がなく、これで正解であると判断しています。一方、ウィーンの放射法則の導出は難解であり、「空洞放射の源は加熱された気体分子であり、そのスペクトル分布は速度分布に依存している」といった飛躍した(現在では受け入れられていない)理論であるため、ほとんど掲載されていません。才気煥発なウィーンは、その当時のヒントと上記の独自の理論により、振動数と指数関数を巧みに使って、可視光域においてうまく合うように提案された(1896年)ものと考えられています。これらの式に比べれば、プランクの放射法則は、地味で堅実な学風のプランクならではの業績に思われ、前述した「プランクの内挿公式」ではありえず、「プランクの放射法則」として受け入れられるべきものでしょう。

3.2 量子論の父

さて、プランクは、しかしながら、この正解とした式の中で微小エネルギー ε の扱いに困惑して

いました。ウィーンに残した理論から ϵ は振動数と比例関係にあることとなります。その係数がすなわちプランク定数 h ですが、周波数 ν に共鳴する共鳴子が $h\nu$ の単位でしかエネルギーの受け取りをしない、といったことを、電気双極子まわりの電磁気学を厳密に学んできたプランクには受け入れがたい内容であったと思われます。ですから、当時、この理論は、発表後も怪しげな理論としてしばらく受け入れられなかったようです。

この結果は、後にアインシュタインやボーアなどによって量子力学の基礎となります。この業績からプランクは、”量子論の父”として知られており、ノーベル物理学賞（1918年）の受賞対象となりました。さらに、1930年には、カイザー・ヴェルヘルム研究所の所長に就任しました。

しかし、第二次世界大戦中には、1943年、ベル

リン空襲によって家を失い、妻と共にエルベ河畔のローゲッツに疎開し、さらに、1944年には次男のエルヴィンが処刑され、自身も「国賊の父」とされるなど散々であったようです。

第二次世界大戦後、彼を記念してカイザー・ヴェルヘルム研究所は「マックス・プランク研究所」と改名されました。ご存じのように、マックス・プランク研究所は、現在も物理学研究の中心地として、様々な研究成果を挙げています。

参考文献

- [1] 熱輻射と量子 物理学古典論文叢書 物理学史研究刊行会編 東海大学出版会 (1976).
- [2] JSME テキストシリーズ 伝熱工学, 日本機械学会編, 丸善 (2005).